Национальная научно-практическая конференция
«Энергия инноваций в инженерном образовании»

Реализация межпредметных связей на примере лекции

«Распределение хи-квадрат в статистической физике»

Кухарь Егор Иванович

28 июля 2021

План доклада

- Реализация межпредметных связей (физика-математика)
- Дистанционный режим образовательного процесса (лекция)
- Пример лекции

Реализация межпредметных связей

Направление бакалавриата: 13.03.01 «Теплоэнергетика и теплотехника»

Разрыв в преподавании дисциплин

Профессиональный модуль

Техническая термодинамика; Теплообменные аппараты и парогенераторы

Реализация межпредметных связей

Направление бакалавриата: 13.03.01 «Теплоэнергетика и теплотехника»

Разрыв в преподавании дисциплин

Физика

Статистическая физика и термодинамика

$\downarrow$

Профессиональный модуль

Техническая термодинамика; Теплообменные аппараты и парогенераторы

Реализация межпредметных связей

Направление бакалавриата: 13.03.01 «Теплоэнергетика и теплотехника»

Разрыв в преподавании дисциплин

Математика

Теория вероятностей и математическая статистика

↓

Физика

Статистическая физика и термодинамика

↓

Профессиональный модуль

Техническая термодинамика; Теплообменные аппараты и парогенераторы

Реализация межпредметных связей

Направление бакалавриата: 13.03.01 «Теплоэнергетика и теплотехника»

Разрыв в преподавании дисциплин

Математика

Теория вероятностей и математическая статистика

$\updownarrow$

Физика

Статистическая физика и термодинамика

Дистанционный режим образовательного процесса

Возможные причины

- Оптимизация экономической системы и процессов в вузе
- Цифровизация социальной сферы
- Чрезвычайные ситуации

Дистанционный режим образовательного процесса

Возможные причины

- Оптимизация экономической системы и процессов в вузе
- Цифровизация социальной сферы
- Чрезвычайные ситуации

Трудности для технических вузов

- Лабораторные работы
- Производственные практики
- Экзамены

Дистанционный режим образовательного процесса

Возможные причины

- Оптимизация экономической системы и процессов в вузе
- Цифровизация социальной сферы
- Чрезвычайные ситуации

Применение

- Дисциплины: математика, информатика, теоретическая физика
- Виды занятий: лекции

Дистанционный режим образовательного процесса

Возможные причины

- Оптимизация экономической системы и процессов в вузе
- Цифровизация социальной сферы
- Чрезвычайные ситуации

Применение

- Дисциплины: математика, информатика, теоретическая физика
- Виды занятий: лекции

Средства

- Системы управления обучением (платформы Moodle ...)
- Сервисы видеотелефонии (Zoom, Skype ...)
  - Видеозапись лекции преподавателя
  - Графические планшеты с электронным пером
  - Показ экрана с презентацией

План лекции

Распределение хи-квадрат в статистической физике

- Распределение хи-квадрат
- Связь с нормальным распределением
- Параметры распределения
- Асимптотическое поведение
- Модель идеального газа
- Внутренняя энергия идеального газа
- Закон Дюлонга-Пти
- Термодинамические параметры

1 РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ХИ-КВАДРАТ

$$F_r\left(z\right) = \frac{1}{2^{r/2}\Gamma\left(r/2\right)}\int\limits_0^z \xi^{\frac{r}{2}-1} e^{-\xi/2} \mathrm{d}\xi \tag{1}$$

r – число степеней свободы

Гамма-функция

$$\Gamma\left(z\right) = \int\limits_0^\infty \xi^{z-1} e^{-\xi} \mathrm{d}\xi$$

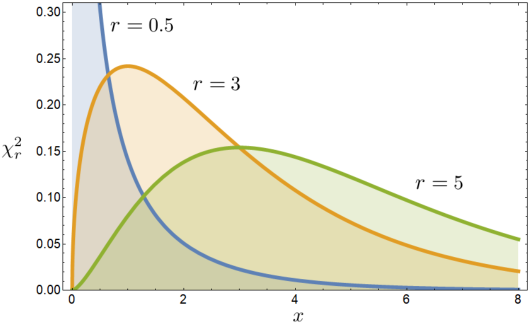
Свойства

- $\Gamma\left(z+1\right) = z\Gamma\left(z\right)$
- $\Gamma\left(n+1\right) = n! \quad n \in \mathbb{N}$

1 РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ХИ-КВАДРАТ

Плотность распределения

$$\chi_r^2(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{r/2}\Gamma(r/2)}\, x^{\frac{r}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, & x > 0 \\ 0, & x \leqslant 0 \end{cases} \tag{1}$$



2 СВЯЗЬ С НОРМАЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

Теорема

Если случайные величины $x_i \quad (i = 1, 2, \ldots, r)$

- независимы друг от друга
- подчиняются стандартному нормальному распределению $\varphi_{0,1}(x_i)$,

то случайная величина $y = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_r^2$ подчиняется распределению $\chi_r^2(y)$

2 СВЯЗЬ С НОРМАЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

Теорема

Если случайные величины $x_i \quad (i = 1, 2, \ldots, r)$

- независимы друг от друга
- подчиняются стандартному нормальному распределению $\varphi_{0,1}(x_i)$,

то случайная величина $y = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_r^2$ подчиняется распределению $\chi_r^2(y)$

$$\mathcal{P}(x_i < z) = \Phi_{0,1}(z) = \int\limits_{-\infty}^{z} \varphi_{0,1}(x_i)\,\mathrm{d}x_i \qquad \varphi_{0,1}(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x_i^2}{2}}$$

2 СВЯЗЬ С НОРМАЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

Теорема

Если случайные величины $x_i \quad (i = 1, 2, \ldots, r)$

- независимы друг от друга
- подчиняются стандартному нормальному распределению $\varphi_{0,1}(x_i)$,

то случайная величина $y = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_r^2$ подчиняется распределению $\chi_r^2(y)$

$$\mathcal{P}(x_i < z) = \Phi_{0,1}(z) = \int\limits_{-\infty}^{z} \varphi_{0,1}(x_i)\,\mathrm{d}x_i \qquad \varphi_{0,1}(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x_i^2}{2}}$$

$$\mathcal{P}\left(0 < y < z^2\right) = \underbrace{\int\int \ldots \int}_{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_r^2<z^2} \varphi_{0,1}(x_1)\,\varphi_{0,1}(x_2)\ldots\varphi_{0,1}(x_r)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\ldots\mathrm{d}x_r$$

2 СВЯЗЬ С НОРМАЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

Теорема

Если случайные величины $x_i \quad (i = 1, 2, \ldots, r)$

- независимы друг от друга
- подчиняются стандартному нормальному распределению $\varphi_{0,1}(x_i)$,

то случайная величина $y = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_r^2$ подчиняется распределению $\chi_r^2(y)$

$$\mathcal{P}(x_i < z) = \Phi_{0,1}(z) = \int\limits_{-\infty}^{z} \varphi_{0,1}(x_i)\,\mathrm{d}x_i \qquad \varphi_{0,1}(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x_i^2}{2}}$$

$$\mathcal{P}\left(0 < y < z^2\right) = \underbrace{\int\int\ldots\int}_{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_r^2<z^2} \varphi_{0,1}(x_1)\,\varphi_{0,1}(x_2)\ldots\varphi_{0,1}(x_r)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\ldots\mathrm{d}x_r$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{r/2}} \underbrace{\int\int\ldots\int}_{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_r^2<z^2} \exp\left(-\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_r^2}{2}\right)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\ldots\mathrm{d}x_r$$

2 СВЯЗЬ С НОРМАЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

Теорема

Если случайные величины $x_i \quad (i = 1, 2, \ldots, r)$

- независимы друг от друга
- подчиняются стандартному нормальному распределению $\varphi_{0,1}(x_i)$,

то случайная величина $y = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_r^2$ подчиняется распределению $\chi_r^2(y)$

$$\mathcal{P}(x_i < z) = \Phi_{0,1}(z) = \int\limits_{-\infty}^{z} \varphi_{0,1}(x_i)\,\mathrm{d}x_i \qquad \varphi_{0,1}(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x_i^2}{2}}$$

Условие нормировки

$$\int\int \ldots \int \varphi_{0,1}(x_1)\,\varphi_{0,1}(x_2)\ldots\varphi_{0,1}(x_r)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\ldots\mathrm{d}x_r = 1$$

2 СВЯЗЬ С НОРМАЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

Теорема

Если случайные величины $x_i \quad (i = 1, 2, \ldots, r)$

- независимы друг от друга
- подчиняются стандартному нормальному распределению $\varphi_{0,1}(x_i)$,

то случайная величина $y = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_r^2$ подчиняется распределению $\chi_r^2(y)$

$$\mathcal{P}(x_i < z) = \Phi_{0,1}(z) = \int\limits_{-\infty}^{z} \varphi_{0,1}(x_i)\,\mathrm{d}x_i \qquad \varphi_{0,1}(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x_i^2}{2}}$$

Условие нормировки

$$\int\int \ldots \int \varphi_{0,1}(x_1)\,\varphi_{0,1}(x_2) \ldots \varphi_{0,1}(x_r)\,\mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_r = 1$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{r/2}} \int\int \ldots \int \exp\left(-\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_r^2}{2}\right) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_r = 1 \qquad (2)$$

2 СВЯЗЬ С НОРМАЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

Теорема

Если случайные величины $x_i \quad (i = 1, 2, \ldots, r)$

- независимы друг от друга
- подчиняются стандартному нормальному распределению $\varphi_{0,1}(x_i)$,

то случайная величина $y = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_r^2$ подчиняется распределению $\chi_r^2(y)$

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_r^2 = \rho^2$$

2 СВЯЗЬ С НОРМАЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

Теорема

Если случайные величины $x_i \quad (i = 1, 2, \ldots, r)$

- независимы друг от друга
- подчиняются стандартному нормальному распределению $\varphi_{0,1}(x_i)$,

то случайная величина $y = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_r^2$ подчиняется распределению $\chi_r^2(y)$

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_r^2 = \rho^2 \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_r = \Omega(r)\,\rho^{r-1}\mathrm{d}\rho$$

2 СВЯЗЬ С НОРМАЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

Теорема

Если случайные величины $x_i \quad (i = 1, 2, \ldots, r)$

- независимы друг от друга
- подчиняются стандартному нормальному распределению $\varphi_{0,1}(x_i)$,

то случайная величина $y = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_r^2$ подчиняется распределению $\chi_r^2(y)$

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_r^2 = \rho^2 \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_r = \Omega(r)\, \rho^{r-1} \mathrm{d}\rho$$

$$\mathcal{P} = \frac{1}{(2\pi)^{r/2}} \underbrace{\int\int \ldots \int}_{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_r^2 < z^2} \exp\left(-\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_r^2}{2}\right) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_r \quad (2)$$

$$\mathcal{P}\left(y < z^2\right) = \frac{1}{(2\pi)^{r/2}}\, \Omega(r) \int_0^z e^{-\frac{\rho^2}{2}} \rho^{r-1} \mathrm{d}\rho \quad (3)$$

2 СВЯЗЬ С НОРМАЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

Теорема

Если случайные величины $x_i \quad (i = 1, 2, \ldots, r)$

- независимы друг от друга
- подчиняются стандартному нормальному распределению $\varphi_{0,1}(x_i)$,

то случайная величина $y = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_r^2$ подчиняется распределению $\chi_r^2(y)$

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_r^2 = \rho^2 \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_r = \Omega(r)\, \rho^{r-1} \mathrm{d}\rho$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{r/2}} \int\int \ldots \int \exp\left(-\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_r^2}{2}\right) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_r = 1 \qquad (2)$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{r/2}}\, \Omega(r) \int\limits_0^\infty e^{-\frac{\rho^2}{2}} \rho^{r-1} \mathrm{d}\rho = 1 \qquad (3)$$

2 СВЯЗЬ С НОРМАЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

Теорема

Если случайные величины $x_i \quad (i = 1, 2, \ldots, r)$

- независимы друг от друга
- подчиняются стандартному нормальному распределению $\varphi_{0,1}(x_i)$,

то случайная величина $y = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_r^2$ подчиняется распределению $\chi_r^2(y)$

$$\frac{1}{(2\pi)^{r/2}}\,\Omega(r)\int\limits_0^\infty e^{-\frac{\rho^2}{2}}\rho^{r-1}\mathrm{d}\rho \;= 1$$

2 СВЯЗЬ С НОРМАЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

Теорема

Если случайные величины $x_i \quad (i = 1, 2, \ldots, r)$

- независимы друг от друга
- подчиняются стандартному нормальному распределению $\varphi_{0,1}(x_i)$,

то случайная величина $y = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_r^2$ подчиняется распределению $\chi_r^2(y)$

$$\frac{1}{(2\pi)^{r/2}}\,\Omega(r)\int\limits_0^\infty e^{-\frac{\rho^2}{2}}\rho^{r-1}\mathrm{d}\rho \;\; =^* \quad \xi = \frac{\rho^2}{2}$$

2 СВЯЗЬ С НОРМАЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

Теорема

Если случайные величины $x_i \quad (i = 1, 2, \ldots, r)$

- независимы друг от друга
- подчиняются стандартному нормальному распределению $\varphi_{0,1}(x_i)$,

то случайная величина $y = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_r^2$ подчиняется распределению $\chi_r^2(y)$

$$\frac{1}{(2\pi)^{r/2}}\,\Omega(r)\int\limits_0^\infty e^{-\frac{\rho^2}{2}}\rho^{r-1}\mathrm{d}\rho \;=^* \quad \xi = \frac{\rho^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \rho = \sqrt{2\xi}$$

2 СВЯЗЬ С НОРМАЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

Теорема

Если случайные величины $x_i \quad (i = 1, 2, \ldots, r)$

- независимы друг от друга
- подчиняются стандартному нормальному распределению $\varphi_{0,1}(x_i)$,

то случайная величина $y = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_r^2$ подчиняется распределению $\chi_r^2(y)$

$$\frac{1}{(2\pi)^{r/2}} \Omega(r) \int\limits_0^\infty e^{-\frac{\rho^2}{2}} \rho^{r-1} \mathrm{d}\rho \;=^* \quad \xi = \frac{\rho^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \rho = \sqrt{2\xi}$$

$$\Rightarrow \qquad \mathrm{d}\rho = \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{2\xi}}$$

2 СВЯЗЬ С НОРМАЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

Теорема

Если случайные величины $x_i \quad (i = 1, 2, \ldots, r)$

- независимы друг от друга
- подчиняются стандартному нормальному распределению $\varphi_{0,1}(x_i)$,

то случайная величина $y = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_r^2$ подчиняется распределению $\chi_r^2(y)$

$$\frac{1}{(2\pi)^{r/2}}\,\Omega(r)\int\limits_0^{\infty} e^{-\frac{\rho^2}{2}}\rho^{r-1}\mathrm{d}\rho \;=^{*} \quad \xi = \frac{\rho^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \rho = \sqrt{2\xi}$$

$$\Rightarrow \qquad \mathrm{d}\rho = \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{2\xi}} \qquad {}^{*}\!= \frac{\Omega(r)}{2\pi^{r/2}}\int\limits_0^{\infty} e^{-\xi}\,\xi^{\frac{r}{2}-1}\mathrm{d}\xi$$

2 Связь с нормальным распределением

Теорема

Если случайные величины $x_i \quad (i = 1, 2, \ldots, r)$

- независимы друг от друга
- подчиняются стандартному нормальному распределению $\varphi_{0,1}(x_i)$,

то случайная величина $y = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_r^2$ подчиняется распределению $\chi_r^2(y)$

$$\frac{1}{(2\pi)^{r/2}}\,\Omega(r)\int\limits_0^\infty e^{-\frac{\rho^2}{2}}\rho^{r-1}\mathrm{d}\rho \;=^* \quad \xi = \frac{\rho^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \rho = \sqrt{2\xi}$$

$$\Rightarrow \qquad \mathrm{d}\rho = \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{2\xi}} \qquad {}^*\!= \frac{\Omega(r)}{2\pi^{r/2}}\underbrace{\int\limits_0^\infty e^{-\xi}\,\xi^{\frac{r}{2}-1}\mathrm{d}\xi}_{=\Gamma(r/2)}$$

2 СВЯЗЬ С НОРМАЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

Теорема

Если случайные величины $x_i \quad (i = 1, 2, \ldots, r)$

- независимы друг от друга
- подчиняются стандартному нормальному распределению $\varphi_{0,1}(x_i)$,

то случайная величина $y = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_r^2$ подчиняется распределению $\chi_r^2(y)$

$$\frac{1}{(2\pi)^{r/2}}\,\Omega(r)\int\limits_0^\infty e^{-\frac{\rho^2}{2}}\rho^{r-1}\mathrm{d}\rho \ =^* \quad \xi = \frac{\rho^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \rho = \sqrt{2\xi}$$

$$\Rightarrow \qquad \mathrm{d}\rho = \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{2\xi}} \quad {}^*\!= \frac{\Omega(r)}{2\pi^{r/2}}\int\limits_0^\infty e^{-\xi}\,\xi^{\frac{r}{2}-1}\mathrm{d}\xi \ = \frac{\Omega(r)}{2\pi^{r/2}}\,\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)$$

2 СВЯЗЬ С НОРМАЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

Теорема

Если случайные величины $x_i \quad (i = 1, 2, \ldots, r)$

- независимы друг от друга
- подчиняются стандартному нормальному распределению $\varphi_{0,1}(x_i)$,

то случайная величина $y = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_r^2$ подчиняется распределению $\chi_r^2(y)$

$$\frac{1}{(2\pi)^{r/2}} \Omega(r) \int\limits_0^{\infty} e^{-\frac{\rho^2}{2}} \rho^{r-1} \mathrm{d}\rho \;=^* \quad \xi = \frac{\rho^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \rho = \sqrt{2\xi}$$

$$\Rightarrow \qquad \mathrm{d}\rho = \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{2\xi}} \quad {}^*\!= \frac{\Omega(r)}{2\pi^{r/2}} \int\limits_0^{\infty} e^{-\xi} \, \xi^{\frac{r}{2}-1} \mathrm{d}\xi \; = \frac{\Omega(r)}{2\pi^{r/2}} \, \Gamma\left(\frac{r}{2}\right) = 1$$

2 СВЯЗЬ С НОРМАЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

Теорема

Если случайные величины $x_i \quad (i = 1, 2, \ldots, r)$

- независимы друг от друга
- подчиняются стандартному нормальному распределению $\varphi_{0,1}(x_i)$,

то случайная величина $y = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_r^2$ подчиняется распределению $\chi_r^2(y)$

$$\frac{1}{(2\pi)^{r/2}}\,\Omega(r)\int\limits_0^\infty e^{-\frac{\rho^2}{2}}\rho^{r-1}\mathrm{d}\rho \;=^* \quad \xi = \frac{\rho^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \rho = \sqrt{2\xi}$$

$$\Rightarrow \qquad \mathrm{d}\rho = \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{2\xi}} \quad {}^*\!= \frac{\Omega(r)}{2\pi^{r/2}}\int\limits_0^\infty e^{-\xi}\,\xi^{\frac{r}{2}-1}\mathrm{d}\xi \;= \frac{\Omega(r)}{2\pi^{r/2}}\,\Gamma\left(\frac{r}{2}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \qquad \Omega(r) = \frac{2\pi^{r/2}}{\Gamma(r/2)}$$

2 СВЯЗЬ С НОРМАЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

Теорема

Если случайные величины $x_i \quad (i = 1, 2, \ldots, r)$

- независимы друг от друга
- подчиняются стандартному нормальному распределению $\varphi_{0,1}(x_i)$,

то случайная величина $y = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_r^2$ подчиняется распределению $\chi_r^2(y)$

$$\Omega(r) = \frac{2\pi^{r/2}}{\Gamma(r/2)} \qquad (2)$$

$$\mathcal{P}\left(y < z^2\right) = \frac{\Omega(r)}{(2\pi)^{r/2}} \int\limits_0^z e^{-\frac{\rho^2}{2}} \rho^{r-1} \mathrm{d}\rho$$

2 СВЯЗЬ С НОРМАЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

Теорема

Если случайные величины $x_i \quad (i = 1, 2, \ldots, r)$

- независимы друг от друга
- подчиняются стандартному нормальному распределению $\varphi_{0,1}(x_i)$,

то случайная величина $y = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_r^2$ подчиняется распределению $\chi_r^2(y)$

$$\Omega(r) = \frac{2\pi^{r/2}}{\Gamma(r/2)} \qquad (2)$$

$$\mathcal{P}\left(y < z^2\right) = \frac{\Omega(r)}{(2\pi)^{r/2}} \int_0^z e^{-\frac{\rho^2}{2}} \rho^{r-1} \mathrm{d}\rho =^* \quad \rho^2 = y \quad \Rightarrow \quad \rho = \sqrt{y}$$

2 СВЯЗЬ С НОРМАЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

Теорема

Если случайные величины $x_i \quad (i = 1, 2, \ldots, r)$

- независимы друг от друга
- подчиняются стандартному нормальному распределению $\varphi_{0,1}(x_i)$,

то случайная величина $y = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_r^2$ подчиняется распределению $\chi_r^2(y)$

$$\Omega(r) = \frac{2\pi^{r/2}}{\Gamma(r/2)} \qquad (2)$$

$$\mathcal{P}\left(y < z^2\right) = \frac{\Omega(r)}{(2\pi)^{r/2}} \int\limits_0^z e^{-\frac{\rho^2}{2}} \rho^{r-1} \mathrm{d}\rho =^* \quad \rho^2 = y \quad \Rightarrow \quad \rho = \sqrt{y}$$

$$\Rightarrow \qquad \mathrm{d}\rho = \frac{\mathrm{d}y}{2\sqrt{y}}$$

2 Связь с нормальным распределением

Теорема

Если случайные величины $x_i \quad (i = 1, 2, \ldots, r)$

- независимы друг от друга
- подчиняются стандартному нормальному распределению $\varphi_{0,1}(x_i)$,

то случайная величина $y = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_r^2$ подчиняется распределению $\chi_r^2(y)$

$$\Omega(r) = \frac{2\pi^{r/2}}{\Gamma(r/2)} \tag{2}$$

$$\mathcal{P}\left(y < z^2\right) = \frac{\Omega(r)}{(2\pi)^{r/2}} \int_0^z e^{-\frac{\rho^2}{2}} \rho^{r-1} \mathrm{d}\rho =^* \quad \rho^2 = y \quad \Rightarrow \quad \rho = \sqrt{y}$$

$$\Rightarrow \qquad \mathrm{d}\rho = \frac{\mathrm{d}y}{2\sqrt{y}} \quad {}^*= \frac{\Omega(r)}{2(2\pi)^{r/2}} \int_0^{z^2} e^{-\frac{y}{2}}\, y^{\frac{r}{2}-1} \mathrm{d}y$$

2 СВЯЗЬ С НОРМАЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

Теорема

Если случайные величины $x_i \quad (i = 1, 2, \ldots, r)$

- независимы друг от друга
- подчиняются стандартному нормальному распределению $\varphi_{0,1}(x_i)$,

то случайная величина $y = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_r^2$ подчиняется распределению $\chi_r^2(y)$

$$\Omega(r) = \frac{2\pi^{r/2}}{\Gamma(r/2)} \tag{2}$$

$$\mathcal{P}\left(y < z^2\right) = \frac{\Omega(r)}{(2\pi)^{r/2}} \int\limits_0^z e^{-\frac{\rho^2}{2}} \rho^{r-1} \mathrm{d}\rho =^* \quad \rho^2 = y \quad \Rightarrow \quad \rho = \sqrt{y}$$

$$\Rightarrow \qquad \mathrm{d}\rho = \frac{\mathrm{d}y}{2\sqrt{y}} \qquad {}^*= \frac{1}{2^{r/2}\Gamma(r/2)} \int\limits_0^{z^2} e^{-\frac{y}{2}}\, y^{\frac{r}{2}-1} \mathrm{d}y = F_r\left(z^2\right)$$

3 ПАРАМЕТРЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

$$\chi_r^2\left(x\right) = \frac{1}{2^{r/2}\Gamma\left(r/2\right)}\; x^{\frac{r}{2}-1}\; e^{-\frac{x}{2}} \tag{3}$$

3 ПАРАМЕТРЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

$$\chi_r^2\left(x\right) = \frac{1}{2^{r/2}\Gamma\left(r/2\right)}\; x^{\frac{r}{2}-1}\; e^{-\frac{x}{2}} \tag{3}$$

Момент n-го порядка

$$\langle\, x^n \,\rangle = \int\limits_0^\infty x^n\; \chi_r^2\left(x\right) \mathrm{d}x$$

3 ПАРАМЕТРЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

$$\chi_r^2\left(x\right) = \frac{1}{2^{r/2}\Gamma\left(r/2\right)}\, x^{\frac{r}{2}-1}\, e^{-\frac{x}{2}} \tag{3}$$

Момент n-го порядка

$$\langle\, x^n \,\rangle = \int\limits_0^\infty x^n\, \chi_r^2\left(x\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{2^{r/2}\Gamma\left(r/2\right)} \int\limits_0^\infty x^{\frac{r}{2}+n-1}\, e^{-\frac{x}{2}} \mathrm{d}x$$

$$\chi_r^2\left(x\right) = \frac{1}{2^{r/2}\Gamma\left(r/2\right)}\; x^{\frac{r}{2}-1}\; e^{-\frac{x}{2}} \tag{3}$$

Момент n-го порядка

$$\langle\, x^n \,\rangle = \int\limits_0^\infty x^n\; \chi_r^2\left(x\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{2^{r/2}\Gamma\left(r/2\right)} \int\limits_0^\infty x^{\frac{r}{2}+n-1}\; e^{-\frac{x}{2}} \mathrm{d}x \quad \stackrel{x=2y}{=}$$

$$= \frac{2^n}{\Gamma\left(r/2\right)} \int\limits_0^\infty y^{\frac{r}{2}+n-1}\; e^{-y} \mathrm{d}y$$

3 ПАРАМЕТРЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

$$\chi_r^2(x) = \frac{1}{2^{r/2}\Gamma(r/2)}\, x^{\frac{r}{2}-1}\, e^{-\frac{x}{2}} \tag{3}$$

Момент n-го порядка

$$\langle\, x^n \,\rangle = \int\limits_0^\infty x^n\, \chi_r^2(x)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2^{r/2}\Gamma(r/2)} \int\limits_0^\infty x^{\frac{r}{2}+n-1}\, e^{-\frac{x}{2}}\, \mathrm{d}x \quad \overset{x=2y}{=}$$

$$= \frac{2^n}{\Gamma(r/2)} \underbrace{\int\limits_0^\infty y^{\frac{r}{2}+n-1}\, e^{-y} \mathrm{d}y}_{=\Gamma(n+r/2)}$$

3 ПАРАМЕТРЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

$$\chi_r^2\,(x) = \frac{1}{2^{r/2}\Gamma\,(r/2)}\; x^{\frac{r}{2}-1}\; e^{-\frac{x}{2}} \tag{3}$$

Момент n-го порядка

$$\langle\, x^n \,\rangle = \int\limits_0^\infty x^n\;\chi_r^2\,(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2^{r/2}\Gamma\,(r/2)}\int\limits_0^\infty x^{\frac{r}{2}+n-1}\; e^{-\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x \quad \overset{x=2y}{=}$$

$$= \frac{2^n}{\Gamma\,(r/2)}\int\limits_0^\infty y^{\frac{r}{2}+n-1}\; e^{-y}\mathrm{d}y \; = \frac{2^n\Gamma\,(n+r/2)}{\Gamma\,(r/2)}$$

3 ПАРАМЕТРЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

$$\chi_r^2(x) = \frac{1}{2^{r/2}\Gamma(r/2)}\, x^{\frac{r}{2}-1}\, e^{-\frac{x}{2}} \tag{3}$$

$$\langle\, x^n \,\rangle = \frac{2^n \Gamma(n + r/2)}{\Gamma(r/2)} \tag{4}$$

3 ПАРАМЕТРЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

$$\chi_r^2\left(x\right) = \frac{1}{2^{r/2}\Gamma\left(r/2\right)}\; x^{\frac{r}{2}-1}\; e^{-\frac{x}{2}} \tag{3}$$

$$\langle\, x^n \,\rangle = \frac{2^n\Gamma\left(n + r/2\right)}{\Gamma\left(r/2\right)} \tag{4}$$

Математическое ожидание

$$n = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \langle\, x \,\rangle = \frac{2\Gamma\left(1 + r/2\right)}{\Gamma\left(r/2\right)}$$

3 ПАРАМЕТРЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

$$\chi_r^2(x) = \frac{1}{2^{r/2}\Gamma(r/2)}\, x^{\frac{r}{2}-1}\, e^{-\frac{x}{2}} \tag{3}$$

$$\langle\, x^n \,\rangle = \frac{2^n\Gamma(n + r/2)}{\Gamma(r/2)} \tag{4}$$

Математическое ожидание

$$\langle\, x \,\rangle = r \tag{5}$$

$$n = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \langle\, x \,\rangle = \frac{2\Gamma(1 + r/2)}{\Gamma(r/2)} =^{*} \quad \Gamma\left(1 + \tfrac{r}{2}\right) = \tfrac{r}{2}\Gamma\left(\tfrac{r}{2}\right) \quad {}^{*}\!= r$$

3 ПАРАМЕТРЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

$$\chi_r^2(x) = \frac{1}{2^{r/2}\Gamma(r/2)}\, x^{\frac{r}{2}-1}\, e^{-\frac{x}{2}} \tag{3}$$

$$\langle\, x^n \,\rangle = \frac{2^n\Gamma(n+r/2)}{\Gamma(r/2)} \tag{4}$$

Математическое ожидание

$$\langle\, x \,\rangle = r \tag{5}$$

$$n = 2 \qquad \Rightarrow \qquad \langle\, x^2 \,\rangle = \frac{4\Gamma(2+r/2)}{\Gamma(r/2)}$$

Дисперсия

3 ПАРАМЕТРЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

$$\chi_r^2(x) = \frac{1}{2^{r/2}\Gamma(r/2)}\, x^{\frac{r}{2}-1}\, e^{-\frac{x}{2}} \tag{3}$$

$$\langle x^n \rangle = \frac{2^n \Gamma(n + r/2)}{\Gamma(r/2)} \tag{4}$$

Математическое ожидание

$$\langle x \rangle = r \tag{5}$$

Дисперсия

$$n = 2 \qquad \Rightarrow \qquad \langle x^2 \rangle = \frac{4\Gamma(2 + r/2)}{\Gamma(r/2)} = 4\left(1 + \frac{r}{2}\right)\frac{r}{2}$$

3 ПАРАМЕТРЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

$$\chi_r^2\left(x\right) = \frac{1}{2^{r/2}\Gamma\left(r/2\right)}\; x^{\frac{r}{2}-1}\; e^{-\frac{x}{2}} \tag{3}$$

$$\langle\, x^n \,\rangle = \frac{2^n\Gamma\left(n + r/2\right)}{\Gamma\left(r/2\right)} \tag{4}$$

Математическое ожидание

$$\langle\, x \,\rangle = r \tag{5}$$

Дисперсия

$$n = 2 \qquad \Rightarrow \qquad \langle\, x^2 \,\rangle = \frac{4\Gamma\left(2 + r/2\right)}{\Gamma\left(r/2\right)} = 4\left(1 + \frac{r}{2}\right)\frac{r}{2} = r^2 + 2r$$

3 ПАРАМЕТРЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

$$\chi_r^2\left(x\right) = \frac{1}{2^{r/2}\Gamma\left(r/2\right)}\; x^{\frac{r}{2}-1}\; e^{-\frac{x}{2}} \tag{3}$$

$$\langle\, x^n \,\rangle = \frac{2^n\Gamma\left(n + r/2\right)}{\Gamma\left(r/2\right)} \tag{4}$$

Математическое ожидание

$$\langle\, x \,\rangle = r \tag{5}$$

Дисперсия

$$\sigma^2 = 2r \tag{6}$$

$$n = 2 \qquad \Rightarrow \qquad \langle\, x^2 \,\rangle = \frac{4\Gamma\left(2 + r/2\right)}{\Gamma\left(r/2\right)} = 4\left(1 + \frac{r}{2}\right)\frac{r}{2} = r^2 + 2r$$

$$\sigma^2 = \langle\, x^2 \,\rangle - r^2 = 2r$$

4 АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ

Распределение χ^2

$$\chi_r^2\,(x) = \frac{1}{2^{r/2}\Gamma\,(r/2)}\; x^{\frac{r}{2}-1}\; e^{-\frac{x}{2}} \tag{7}$$

Нормальное распределение

$$\varphi_{r,\sigma^2}\,(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\;\sigma}\; e^{-\frac{(x-r)^2}{2\sigma^2}} \tag{8}$$

$$\sigma^2 = 2r$$

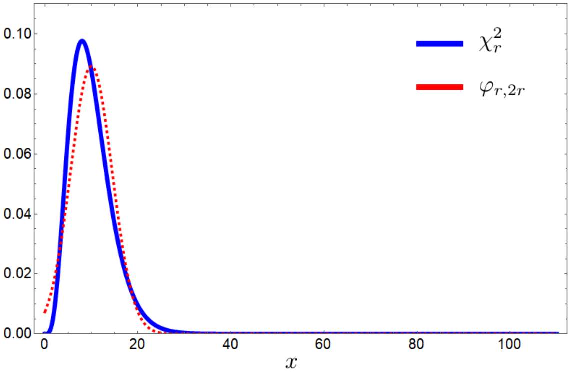
4 АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ

Распределение χ^2

$$\chi_r^2(x) = \frac{1}{2^{r/2}\Gamma(r/2)}\, x^{\frac{r}{2}-1}\, e^{-\frac{x}{2}} \quad (7)$$

Нормальное распределение

$$\varphi_{r,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{(x-r)^2}{2\sigma^2}} \quad (8)$$



$$\sigma^2 = 2r$$

$$r = 10$$

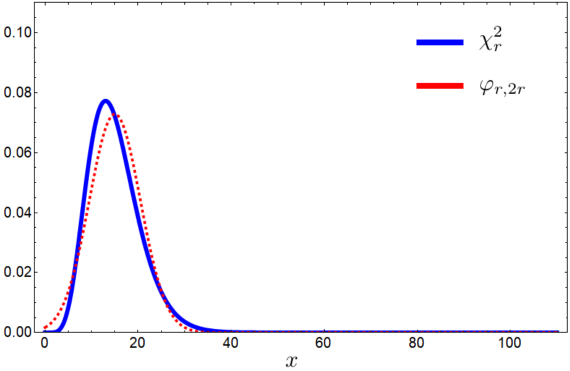
4 АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ

Распределение χ^2

$$\chi^2_r(x) = \frac{1}{2^{r/2}\Gamma(r/2)}\, x^{\frac{r}{2}-1}\, e^{-\frac{x}{2}} \qquad \textbf{(7)}$$

Нормальное распределение

$$\varphi_{r,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{(x-r)^2}{2\sigma^2}} \qquad \textbf{(8)}$$



$$\sigma^2 = 2r$$

$$r = 15$$

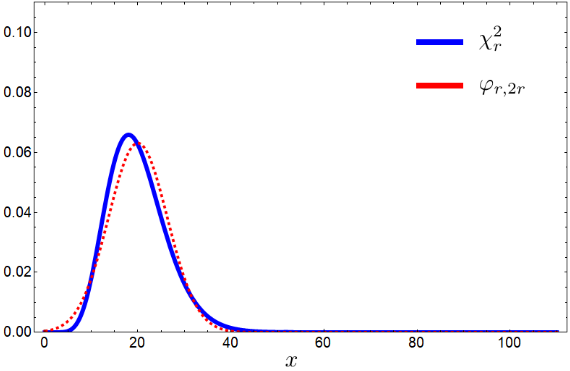
4 АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ

Распределение χ^2

$$\chi_r^2(x) = \frac{1}{2^{r/2}\Gamma(r/2)}\, x^{\frac{r}{2}-1}\, e^{-\frac{x}{2}} \qquad \textbf{(7)}$$

Нормальное распределение

$$\varphi_{r,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{(x-r)^2}{2\sigma^2}} \qquad \textbf{(8)}$$



$$\sigma^2 = 2r$$

$$r = 20$$

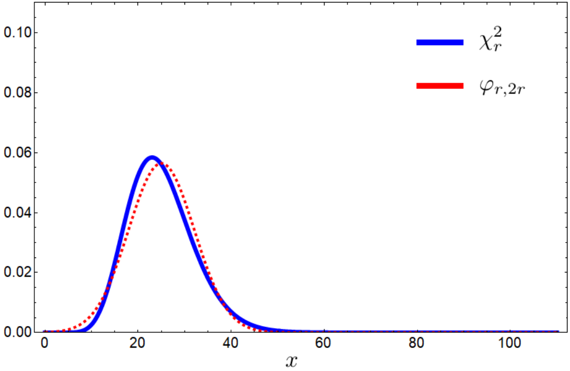
4 АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ

Распределение χ^2

$$\chi_r^2(x) = \frac{1}{2^{r/2}\Gamma(r/2)}\, x^{\frac{r}{2}-1}\, e^{-\frac{x}{2}} \quad \textbf{(7)}$$

Нормальное распределение

$$\varphi_{r,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{(x-r)^2}{2\sigma^2}} \quad \textbf{(8)}$$



$\sigma^2 = 2r$

$r = 25$

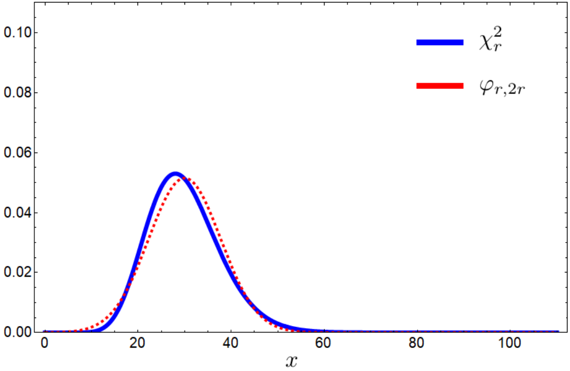
4 АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ

Распределение χ^2

$$\chi^2_r(x) = \frac{1}{2^{r/2}\Gamma(r/2)}\, x^{\frac{r}{2}-1}\, e^{-\frac{x}{2}} \qquad \textbf{(7)}$$

Нормальное распределение

$$\varphi_{r,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{(x-r)^2}{2\sigma^2}} \qquad \textbf{(8)}$$



$$\sigma^2 = 2r$$

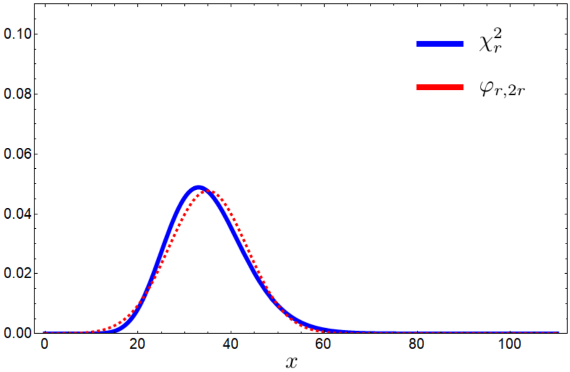
$$r = 30$$

Распределение χ^2

$$\chi_r^2(x) = \frac{1}{2^{r/2}\Gamma(r/2)}\, x^{\frac{r}{2}-1}\, e^{-\frac{x}{2}} \qquad \textbf{(7)}$$

Нормальное распределение

$$\varphi_{r,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{(x-r)^2}{2\sigma^2}} \qquad \textbf{(8)}$$



$\sigma^2 = 2r$

$r = 35$

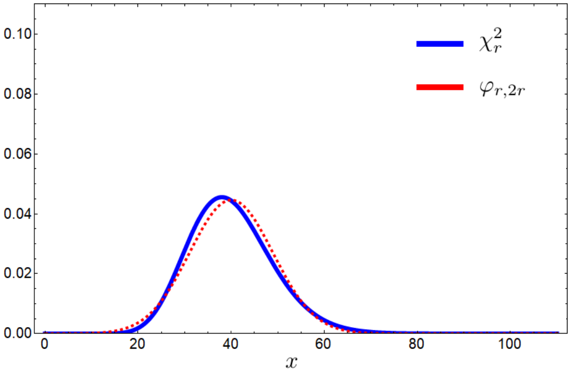
4 АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ

Распределение χ^2

$$\chi_r^2(x) = \frac{1}{2^{r/2}\Gamma(r/2)}\, x^{\frac{r}{2}-1}\, e^{-\frac{x}{2}} \quad \textbf{(7)}$$

Нормальное распределение

$$\varphi_{r,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{(x-r)^2}{2\sigma^2}} \quad \textbf{(8)}$$



$\sigma^2 = 2r$

$r = 40$

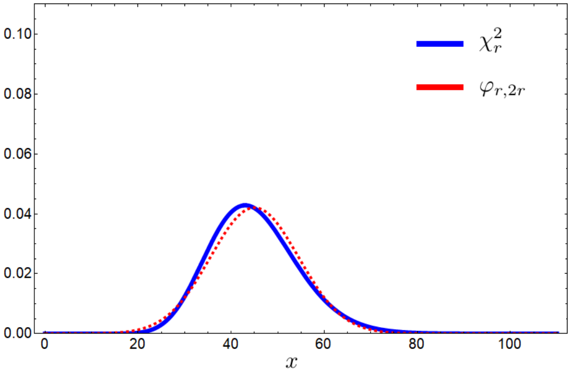
4 АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ

Распределение χ^2

$$\chi^2_r(x) = \frac{1}{2^{r/2}\Gamma(r/2)}\, x^{\frac{r}{2}-1}\, e^{-\frac{x}{2}} \quad (7)$$

Нормальное распределение

$$\varphi_{r,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{(x-r)^2}{2\sigma^2}} \quad (8)$$



$$\sigma^2 = 2r$$

$$r = 45$$

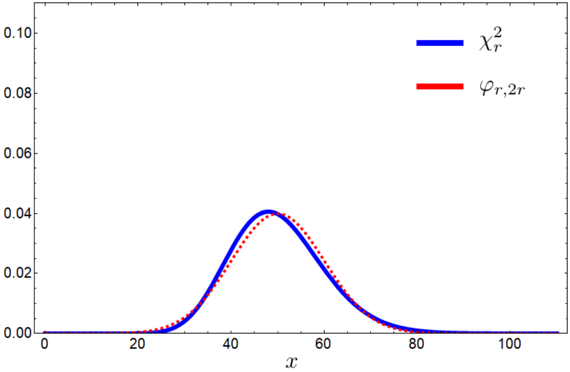
4 АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ

Распределение χ^2

$$\chi_r^2(x) = \frac{1}{2^{r/2}\Gamma(r/2)}\, x^{\frac{r}{2}-1}\, e^{-\frac{x}{2}} \quad (7)$$

Нормальное распределение

$$\varphi_{r,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{(x-r)^2}{2\sigma^2}} \quad (8)$$



$\sigma^2 = 2r$

$r = 50$

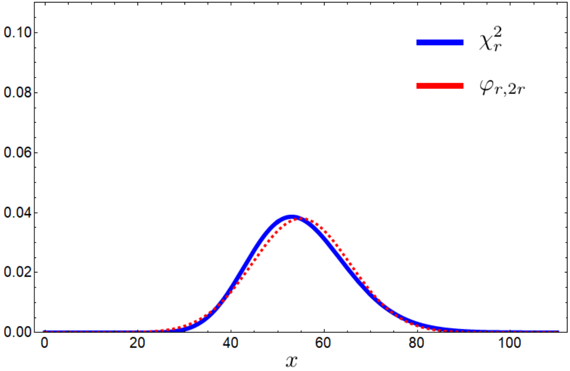
4 АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ

Распределение χ^2

$$\chi_r^2(x) = \frac{1}{2^{r/2}\Gamma(r/2)}\, x^{\frac{r}{2}-1}\, e^{-\frac{x}{2}} \qquad (7)$$

Нормальное распределение

$$\varphi_{r,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{(x-r)^2}{2\sigma^2}} \qquad (8)$$



$$\sigma^2 = 2r$$

$$r = 55$$

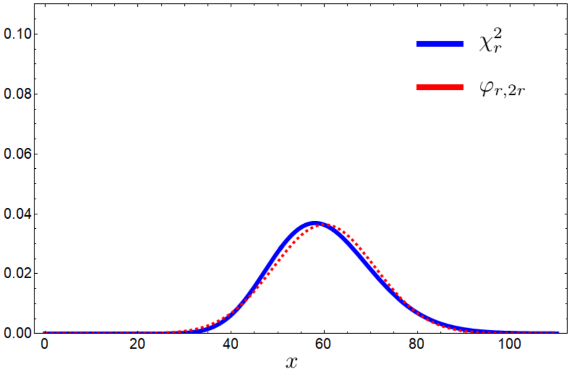
4 АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ

Распределение χ^2

$$\chi_r^2(x) = \frac{1}{2^{r/2}\Gamma(r/2)}\, x^{\frac{r}{2}-1}\, e^{-\frac{x}{2}} \qquad (7)$$

Нормальное распределение

$$\varphi_{r,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{(x-r)^2}{2\sigma^2}} \qquad (8)$$



$$\sigma^2 = 2r$$

$$r = 60$$

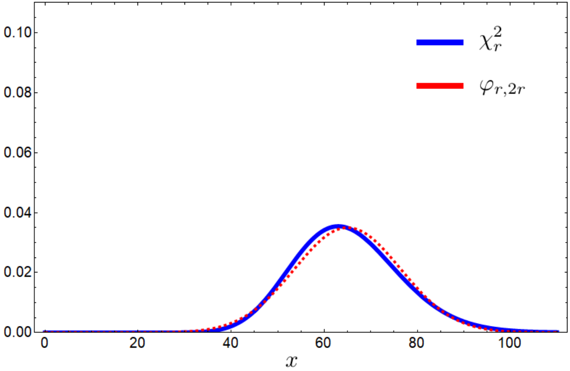
4 АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ

Распределение χ^2

$$\chi_r^2(x) = \frac{1}{2^{r/2}\Gamma(r/2)}\, x^{\frac{r}{2}-1}\, e^{-\frac{x}{2}} \qquad (7)$$

Нормальное распределение

$$\varphi_{r,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{(x-r)^2}{2\sigma^2}} \qquad (8)$$



$$\sigma^2 = 2r$$

$$r = 65$$

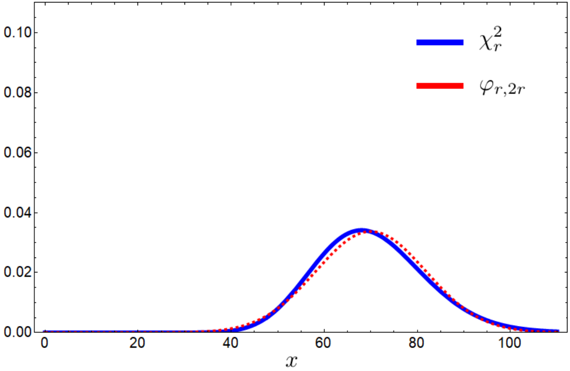
4 АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ

Распределение χ^2

$$\chi_r^2(x) = \frac{1}{2^{r/2}\Gamma(r/2)}\, x^{\frac{r}{2}-1}\, e^{-\frac{x}{2}} \qquad (7)$$

Нормальное распределение

$$\varphi_{r,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{(x-r)^2}{2\sigma^2}} \qquad (8)$$



$$\sigma^2 = 2r$$

$$r = 70$$

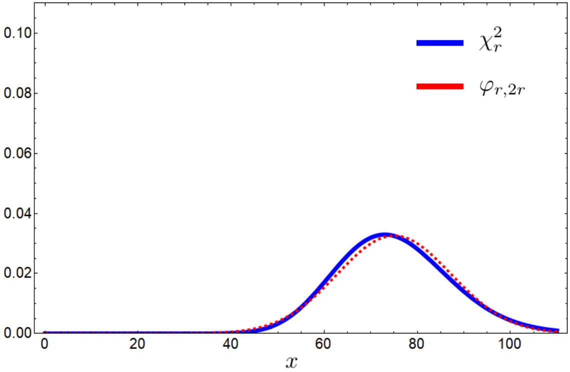
4 АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ

Распределение χ^2

$$\chi_r^2(x) = \frac{1}{2^{r/2}\Gamma(r/2)}\, x^{\frac{r}{2}-1}\, e^{-\frac{x}{2}} \qquad \textbf{(7)}$$

Нормальное распределение

$$\varphi_{r,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{(x-r)^2}{2\sigma^2}} \qquad \textbf{(8)}$$



$$\sigma^2 = 2r$$

$$r = 75$$

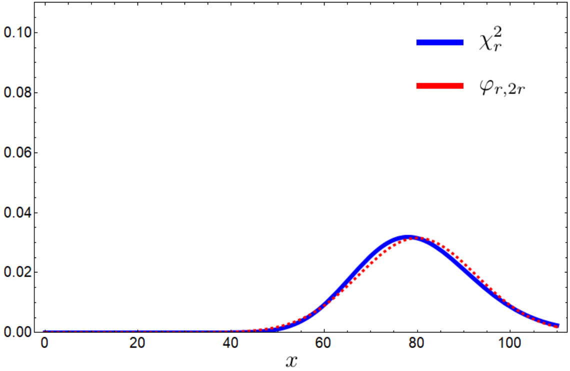
4 АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ

Распределение χ^2

$$\chi_r^2(x) = \frac{1}{2^{r/2}\Gamma(r/2)}\, x^{\frac{r}{2}-1}\, e^{-\frac{x}{2}} \qquad \textbf{(7)}$$

Нормальное распределение

$$\varphi_{r,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{(x-r)^2}{2\sigma^2}} \qquad \textbf{(8)}$$



$$\sigma^2 = 2r$$

$$r = 80$$

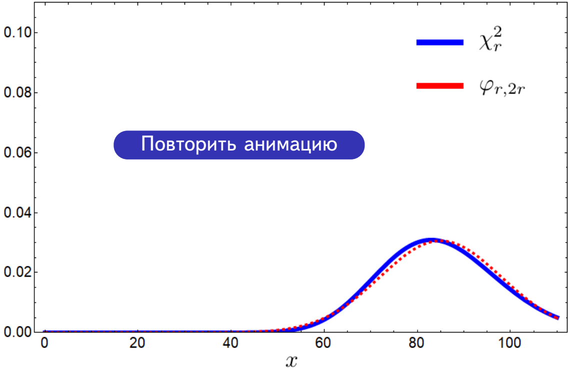
4 АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ

Распределение χ^2

$$\chi_r^2(x) = \frac{1}{2^{r/2}\Gamma(r/2)}\, x^{\frac{r}{2}-1}\, e^{-\frac{x}{2}} \qquad \textbf{(7)}$$

Нормальное распределение

$$\varphi_{r,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{(x-r)^2}{2\sigma^2}} \qquad \textbf{(8)}$$



$$\sigma^2 = 2r$$

$$r = 85$$

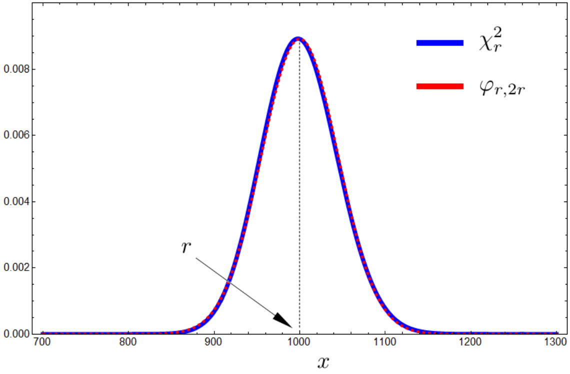
4 АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ

Распределение χ^2

$$\chi_r^2(x) = \frac{1}{2^{r/2}\Gamma(r/2)}\, x^{\frac{r}{2}-1}\, e^{-\frac{x}{2}} \qquad \text{(7)}$$

Нормальное распределение

$$\varphi_{r,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{(x-r)^2}{2\sigma^2}} \qquad \text{(8)}$$



$$\sigma^2 = 2r$$

$$r = 10^3$$

4 АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ

Теорема

Если выполняются условия

$$r \gg 1 \qquad\qquad \frac{|x-r|}{r} \ll 1 \quad , \tag{7}$$

то распределение $\chi_r^2(x)$ асимптотически приближается к нормальному распределению φ_{r,σ^2} с дисперсией $\sigma^2 = 2r$

$$\chi_r^2(x) = \frac{1}{2^{r/2}\Gamma(r/2)}\, x^{\frac{r}{2}-1}\, e^{-\frac{x}{2}}$$

4 АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ

Теорема

Если выполняются условия

$$r \gg 1 \qquad \frac{|x-r|}{r} \ll 1 \quad , \tag{7}$$

то распределение $\chi_r^2(x)$ асимптотически приближается к нормальному распределению φ_{r,σ^2} с дисперсией $\sigma^2 = 2r$

$$\chi_r^2(x) = \frac{r}{2 \cdot 2^{r/2} \Gamma(r/2+1)} \, x^{\frac{r}{2}-1} \, e^{-\frac{x}{2}}$$

$$r \gg 1 \qquad \Rightarrow \qquad \Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right) \approx \sqrt{2\pi} \left(\frac{r}{2}\right)^{\frac{r+1}{2}} e^{-\frac{r}{2}}$$

4 АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ

Теорема

Если выполняются условия

$$r \gg 1 \qquad \frac{|x-r|}{r} \ll 1 \quad , \tag{7}$$

то распределение $\chi^2_r(x)$ асимптотически приближается к нормальному распределению φ_{r,σ^2} с дисперсией $\sigma^2 = 2r$

$$\chi^2_r(x) = \frac{r}{2 \cdot 2^{r/2}\Gamma(r/2+1)}\, x^{\frac{r}{2}-1}\, e^{-\frac{x}{2}}$$

$$r \gg 1 \qquad \Rightarrow \qquad \Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right) \approx \sqrt{2\pi}\left(\frac{r}{2}\right)^{\frac{r+1}{2}} e^{-\frac{r}{2}}$$

$$\Rightarrow \qquad \chi^2_r(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi r}}\left(\frac{x}{r}\right)^{\frac{r}{2}-1} e^{-\frac{x-r}{2}}$$

4 АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ

Теорема

Если выполняются условия

$$r \gg 1 \qquad \frac{|x-r|}{r} \ll 1 \quad , \tag{7}$$

то распределение $\chi_r^2(x)$ асимптотически приближается к нормальному распределению φ_{r,σ^2} с дисперсией $\sigma^2 = 2r$

$$\chi_r^2(x) = \frac{r}{2 \cdot 2^{r/2}\Gamma(r/2+1)}\, x^{\frac{r}{2}-1}\, e^{-\frac{x}{2}}$$

$$r \gg 1 \qquad \Rightarrow \qquad \Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right) \approx \sqrt{2\pi}\left(\frac{r}{2}\right)^{\frac{r+1}{2}} e^{-\frac{r}{2}}$$

$$\Rightarrow \qquad \chi_r^2(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi r}}\left(\frac{x}{r}\right)^{\frac{r}{2}} \quad e^{-\frac{x-r}{2}}$$

4 АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ

Теорема

Если выполняются условия

$$r \gg 1 \qquad \frac{|x-r|}{r} \ll 1 \quad , \tag{7}$$

то распределение $\chi_r^2(x)$ асимптотически приближается к нормальному распределению φ_{r,σ^2} с дисперсией $\sigma^2 = 2r$

$$\chi_r^2(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi r}} \left(\frac{x}{r}\right)^{\frac{r}{2}} e^{-\frac{x-r}{2}}$$

$$\ln \chi_r^2(x) = -\ln(2\sqrt{\pi r}) - \frac{x-r}{2} + \frac{r}{2} \ln\left(\frac{x}{r}\right)$$

Теорема

Если выполняются условия

$$r \gg 1 \qquad \frac{|x-r|}{r} \ll 1 \quad , \tag{7}$$

то распределение $\chi_r^2\,(x)$ асимптотически приближается к нормальному распределению φ_{r,σ^2} с дисперсией $\sigma^2 = 2r$

$$\chi_r^2\,(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi r}}\,\left(\frac{x}{r}\right)^{\frac{r}{2}}\, e^{-\frac{x-r}{2}}$$

$$\ln \chi_r^2\,(x) = -\ln\left(2\sqrt{\pi r}\right) - \frac{x-r}{2} + \frac{r}{2}\ln\left(1+\frac{x-r}{r}\right)$$

4 АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ

Теорема

Если выполняются условия

$$r \gg 1 \qquad \frac{|x-r|}{r} \ll 1 \quad , \tag{7}$$

то распределение $\chi_r^2\left(x\right)$ асимптотически приближается к нормальному распределению φ_{r,σ^2} с дисперсией $\sigma^2 = 2r$

$$\chi_r^2\left(x\right) = \frac{1}{2\sqrt{\pi r}} \left(\frac{x}{r}\right)^{\frac{r}{2}} e^{-\frac{x-r}{2}}$$

$$\ln \chi_r^2\left(x\right) = -\ln\left(2\sqrt{\pi r}\right) - \frac{x-r}{2} + \frac{r}{2}\ln\left(1 + \frac{x-r}{r}\right)$$

$$\ln\left(1+\xi\right) = \xi - \frac{\xi^2}{2} + \ldots$$

Теорема

Если выполняются условия

$$r \gg 1 \qquad\qquad \frac{|x-r|}{r} \ll 1 \quad , \tag{7}$$

то распределение $\chi_r^2\left(x\right)$ асимптотически приближается к нормальному распределению φ_{r,σ^2} с дисперсией $\sigma^2 = 2r$

$$\chi_r^2\left(x\right) = \frac{1}{2\sqrt{\pi r}} \left(\frac{x}{r}\right)^{\frac{r}{2}} e^{-\frac{x-r}{2}}$$

$$\ln \chi_r^2\left(x\right) = -\ln\left(2\sqrt{\pi r}\right) - \frac{x-r}{2} + \frac{r}{2}\ln\left(1+\frac{x-r}{r}\right) \approx -\ln\left(2\sqrt{\pi r}\right) -$$

$$-\frac{x-r}{2} + \frac{r}{2}\left(\frac{x-r}{r} - \frac{\left(x-r\right)^2}{2r^2}\right)$$

Теорема

Если выполняются условия

$$r \gg 1 \qquad \frac{|x-r|}{r} \ll 1 \quad , \tag{7}$$

то распределение $\chi_r^2(x)$ асимптотически приближается к нормальному распределению φ_{r,σ^2} с дисперсией $\sigma^2 = 2r$

$$\chi_r^2(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi r}} \left(\frac{x}{r}\right)^{\frac{r}{2}} e^{-\frac{x-r}{2}}$$

$$\ln \chi_r^2(x) = -\ln\left(2\sqrt{\pi r}\right) - \frac{x-r}{2} + \frac{r}{2} \ln\left(1 + \frac{x-r}{r}\right) \approx -\ln\left(2\sqrt{\pi r}\right) -$$

$$-\frac{x-r}{2} + \frac{r}{2}\left(\frac{x-r}{r} - \frac{(x-r)^2}{2r^2}\right) = -\ln\left(2\sqrt{\pi r}\right) - \frac{(x-r)^2}{4r}$$

4 АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ

Теорема

Если выполняются условия

$$r \gg 1 \qquad \frac{|x-r|}{r} \ll 1 \quad , \tag{7}$$

то распределение $\chi_r^2(x)$ асимптотически приближается к нормальному распределению φ_{r,σ^2} с дисперсией $\sigma^2 = 2r$

$$\chi_r^2(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi r}} \left(\frac{x}{r}\right)^{\frac{r}{2}} e^{-\frac{x-r}{2}}$$

$$\ln \chi_r^2(x) = -\ln\left(2\sqrt{\pi r}\right) - \frac{(x-r)^2}{4r}$$

$$\Rightarrow \qquad \chi_r^2(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi r}}\, e^{-\frac{(x-r)^2}{4r}}$$

4 АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ

Теорема

Если выполняются условия

$$r \gg 1 \qquad \frac{|x-r|}{r} \ll 1 \quad , \tag{7}$$

то распределение $\chi^2_r(x)$ асимптотически приближается к нормальному распределению φ_{r,σ^2} с дисперсией $\sigma^2 = 2r$

$$\chi^2_r(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi r}} \left(\frac{x}{r}\right)^{\frac{r}{2}} e^{-\frac{x-r}{2}}$$

$$\ln \chi^2_r(x) = -\ln\left(2\sqrt{\pi r}\right) - \frac{(x-r)^2}{4r}$$

$$\Rightarrow \qquad \chi^2_r(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi r}}\, e^{-\frac{(x-r)^2}{4r}} \overset{\sigma^2=2r}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{(x-r)^2}{2\sigma^2}} = \varphi_{r,\sigma^2}(x)$$

4 АСИМПТОТИЧЕСКОЕ УСРЕДНЕНИЕ

Теорема

Если случайная величина x подчиняется $\chi^2_r\,(x)$, то при $r \gg 1$

$$\langle\, \lambda\,(x)\,\rangle \approx \lambda\big(\,\langle\, x\,\rangle\,\big) \tag{8}$$

4 Асимптотическое усреднение

Теорема

Если случайная величина x подчиняется $\chi_r^2(x)$, то при $r \gg 1$

$$\langle \lambda(x) \rangle \approx \lambda\big(\langle x \rangle\big) \tag{8}$$

$$\langle \lambda(x) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda(x)\, \chi_r^2(x)\, \mathrm{d}x$$

4 АСИМПТОТИЧЕСКОЕ УСРЕДНЕНИЕ

Теорема

Если случайная величина x подчиняется $\chi_r^2(x)$, то при $r \gg 1$

$$\langle \lambda(x) \rangle \approx \lambda\big(\langle x \rangle\big) \tag{8}$$

$$\langle \lambda(x) \rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda(x)\, \chi_r^2(x)\, \mathrm{d}x \approx \frac{1}{\sqrt{4\pi r}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda(x)\, e^{-\frac{(x-r)^2}{4r}}\, \mathrm{d}x$$

4 АСИМПТОТИЧЕСКОЕ УСРЕДНЕНИЕ

Теорема

Если случайная величина x подчиняется $\chi_r^2(x)$, то при $r \gg 1$

$$\langle \lambda(x) \rangle \approx \lambda\big(\langle x \rangle\big) \qquad (8)$$

$$\langle \lambda(x) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda(x)\, \chi_r^2(x)\, \mathrm{d}x \approx \frac{1}{\sqrt{4\pi r}} \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda(x)\, e^{-\frac{(x-r)^2}{4r}}\, \mathrm{d}x =$$

$$=^* \quad x = r(\xi+1) \quad {}^*= \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda\Big(r(\xi+1)\Big) \sqrt{\frac{r}{4\pi}}\, e^{-\frac{r\xi^2}{4}}\, \mathrm{d}\xi$$

4 АСИМПТОТИЧЕСКОЕ УСРЕДНЕНИЕ

Теорема

Если случайная величина x подчиняется $\chi^2_r(x)$, то при $r \gg 1$

$$\langle\, \lambda(x) \,\rangle \approx \lambda\big(\langle\, x \,\rangle\big) \tag{8}$$

$$\langle\, \lambda(x) \,\rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda(x)\, \chi^2_r(x)\, \mathrm{d}x \approx \frac{1}{\sqrt{4\pi r}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda(x)\, e^{-\frac{(x-r)^2}{4r}}\, \mathrm{d}x =$$

$$=^* \quad x = r(\xi + 1) \quad {}^*= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda\Big(r(\xi+1)\Big)\, \underline{\sqrt{\frac{r}{4\pi}}\, e^{-\frac{r\xi^2}{4}}}\, \mathrm{d}\xi$$

- $$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{r}{4\pi}}\, e^{-\frac{r\xi^2}{4}}\, \mathrm{d}\xi = 1$$

4 АСИМПТОТИЧЕСКОЕ УСРЕДНЕНИЕ

Теорема

Если случайная величина x подчиняется $\chi_r^2(x)$, то при $r \gg 1$

$$\langle \lambda(x) \rangle \approx \lambda\big(\langle x \rangle\big) \tag{8}$$

$$\langle \lambda(x) \rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda(x)\, \chi_r^2(x)\, \mathrm{d}x \approx \frac{1}{\sqrt{4\pi r}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda(x)\, e^{-\frac{(x-r)^2}{4r}}\, \mathrm{d}x =$$

$$=^* \quad x = r(\xi + 1) \quad {}^*= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda\Big(r(\xi+1)\Big) \underline{\sqrt{\frac{r}{4\pi}}\, e^{-\frac{r\xi^2}{4}}}\, \mathrm{d}\xi$$

- $\lim\limits_{r\to\infty} \left(\sqrt{\frac{r}{4\pi}}\, e^{-\frac{r\xi^2}{4}} \right)_{\xi=0} = \lim\limits_{r\to\infty} \sqrt{\frac{r}{4\pi}} = \infty$

Теорема

Если случайная величина x подчиняется $\chi_r^2\,(x)$, то при $r \gg 1$

$$\langle\, \lambda\,(x)\,\rangle \approx \lambda\big(\,\langle\, x\,\rangle\,\big) \tag{8}$$

$$\langle\, \lambda\,(x)\,\rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda\,(x)\,\chi_r^2\,(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{1}{\sqrt{4\pi r}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda\,(x)\,e^{-\frac{(x-r)^2}{4r}}\,\mathrm{d}x =$$

$$=^{*} \quad x = r\,(\xi + 1) \quad {}^{*}\!= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda\Big(r\,(\xi + 1)\Big)\,\underbrace{\sqrt{\frac{r}{4\pi}}\,e^{-\frac{r\xi^2}{4}}}_{\to\,\delta(\xi)}\,\mathrm{d}\xi$$

- $$\lim_{r\to\infty}\left(\sqrt{\frac{r}{4\pi}}\,e^{-\frac{r\xi^2}{4}}\right)_{\xi\neq 0} = 0$$

4 АСИМПТОТИЧЕСКОЕ УСРЕДНЕНИЕ

Теорема

Если случайная величина x подчиняется $\chi^2_r(x)$, то при $r \gg 1$

$$\langle\, \lambda(x) \,\rangle \approx \lambda\big(\langle\, x \,\rangle\big) \tag{8}$$

$$\langle\, \lambda(x) \,\rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda(x)\, \chi^2_r(x)\, \mathrm{d}x \approx \frac{1}{\sqrt{4\pi r}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda(x)\, e^{-\frac{(x-r)^2}{4r}}\, \mathrm{d}x =$$

$$=^* \quad x = r\,(\xi + 1) \quad {}^*= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda\Big(r\,(\xi+1)\Big) \underbrace{\sqrt{\frac{r}{4\pi}}\, e^{-\frac{r\xi^2}{4}}}_{\to\,\delta(\xi)}\, \mathrm{d}\xi \quad =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda\Big(r\,(\xi+1)\Big) \delta(\xi)\, \mathrm{d}\xi$$

4 Асимптотическое усреднение

Теорема

Если случайная величина x подчиняется $\chi_r^2(x)$, то при $r \gg 1$

$$\langle \lambda(x) \rangle \approx \lambda\big(\langle x \rangle\big) \tag{8}$$

$$\langle \lambda(x) \rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda(x)\, \chi_r^2(x)\, \mathrm{d}x \approx \frac{1}{\sqrt{4\pi r}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda(x)\, e^{-\frac{(x-r)^2}{4r}}\, \mathrm{d}x =$$

$$=^* \quad x = r(\xi+1) \quad ^*= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda\Big(r(\xi+1)\Big) \underbrace{\sqrt{\frac{r}{4\pi}}\, e^{-\frac{r\xi^2}{4}}}_{\to\, \delta(\xi)} \mathrm{d}\xi \quad =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda\Big(r(\xi+1)\Big) \delta(\xi)\, \mathrm{d}\xi = \lambda(r) = \lambda\big(\langle x \rangle\big)$$

5 МОДЕЛЬ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

Определение

Идеальный газ – макроскопическая система, состоящая из N частиц $(N \sim N_{\mathsf{A}})$, взаимодействующих между собой только при непосредственном соударении

5 МОДЕЛЬ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

Определение

Идеальный газ – макроскопическая система, состоящая из N частиц $(N \sim N_{\mathsf{A}})$, взаимодействующих между собой только при непосредственном соударении

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{3N} \frac{p_i^2}{2m}$$

5 МОДЕЛЬ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

Определение

Идеальный газ – макроскопическая система, состоящая из N частиц $(N \sim N_{\mathsf{A}})$, взаимодействующих между собой только при непосредственном соударении

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{3N} \frac{p_i^2}{2m} \qquad \varphi\left(p_i\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi mkT}}\, e^{-\frac{p_i^2}{2mkT}} \tag{9}$$

5 МОДЕЛЬ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

Определение

Идеальный газ – макроскопическая система, состоящая из N частиц $(N \sim N_\mathsf{A})$, взаимодействующих между собой только при непосредственном соударении

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{3N} \frac{p_i^2}{2m} \qquad \varphi\left(p_i\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi mkT}}\, e^{-\frac{p_i^2}{2mkT}} \tag{9}$$

$$r \equiv 3N \qquad y \equiv \frac{2\varepsilon}{kT} \qquad x_i \equiv \frac{p_i}{\sqrt{mkT}} \tag{10}$$

5 МОДЕЛЬ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

Определение

Идеальный газ – макроскопическая система, состоящая из N частиц $(N \sim N_\mathrm{A})$, взаимодействующих между собой только при непосредственном соударении

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{3N} \frac{p_i^2}{2m} \qquad \varphi\left(p_i\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi mkT}}\, e^{-\frac{p_i^2}{2mkT}} \tag{9}$$

$$r \equiv 3N \qquad y \equiv \frac{2\varepsilon}{kT} \qquad x_i \equiv \frac{p_i}{\sqrt{mkT}} \tag{10}$$

$$y = \frac{2\varepsilon}{kT} = \sum_{i=1}^{r} \frac{p_i^2}{mkT}$$

5 МОДЕЛЬ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

Определение

Идеальный газ – макроскопическая система, состоящая из N частиц $(N \sim N_{\mathrm{A}})$, взаимодействующих между собой только при непосредственном соударении

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{3N} \frac{p_i^2}{2m} \qquad \varphi\left(p_i\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi mkT}}\, e^{-\frac{p_i^2}{2mkT}} \tag{9}$$

$$r \equiv 3N \qquad y \equiv \frac{2\varepsilon}{kT} \qquad x_i \equiv \frac{p_i}{\sqrt{mkT}} \tag{10}$$

$$y = \frac{2\varepsilon}{kT} = \sum_{i=1}^{r} \frac{p_i^2}{mkT} = \sum_{i=1}^{r} x_i^2$$

5 МОДЕЛЬ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

Определение

Идеальный газ – макроскопическая система, состоящая из N частиц $(N \sim N_{\mathsf{A}})$, взаимодействующих между собой только при непосредственном соударении

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{3N} \frac{p_i^2}{2m} \qquad \varphi\left(p_i\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi mkT}}\, e^{-\frac{p_i^2}{2mkT}} \tag{9}$$

$$r \equiv 3N \qquad y \equiv \frac{2\varepsilon}{kT} \qquad x_i \equiv \frac{p_i}{\sqrt{mkT}} \tag{10}$$

$$y = \frac{2\varepsilon}{kT} = \sum_{i=1}^{r} \frac{p_i^2}{mkT} = \sum_{i=1}^{r} x_i^2$$

$$\mathcal{P}\left(p_i' < p_i\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi mkT}} \int\limits_{-\infty}^{p_i} e^{-\frac{{p'}_i^2}{2mkT}}\, \mathrm{d}p_i'$$

5 МОДЕЛЬ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

Определение

Идеальный газ – макроскопическая система, состоящая из N частиц $(N \sim N_{\mathsf{A}})$, взаимодействующих между собой только при непосредственном соударении

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{3N} \frac{p_i^2}{2m} \qquad \varphi(p_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi mkT}}\, e^{-\frac{p_i^2}{2mkT}} \tag{9}$$

$$r \equiv 3N \qquad y \equiv \frac{2\varepsilon}{kT} \qquad x_i \equiv \frac{p_i}{\sqrt{mkT}} \tag{10}$$

$$y = \frac{2\varepsilon}{kT} = \sum_{i=1}^{r} \frac{p_i^2}{mkT} = \sum_{i=1}^{r} x_i^2$$

$$\mathcal{P}(p_i' < p_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi mkT}} \int_{-\infty}^{p_i} e^{-\frac{p_i'^2}{2mkT}}\, \mathrm{d}p_i' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x_i} e^{-\frac{x_i'^2}{2}}\, \mathrm{d}x_i' = \mathcal{P}(x_i' < x_i)$$

5 МОДЕЛЬ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

Определение

Идеальный газ – макроскопическая система, состоящая из N частиц $(N \sim N_{\text{A}})$, взаимодействующих между собой только при непосредственном соударении

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{3N} \frac{p_i^2}{2m} \qquad \varphi\left(p_i\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi mkT}}\, e^{-\frac{p_i^2}{2mkT}} \tag{9}$$

$$r \equiv 3N \qquad y \equiv \frac{2\varepsilon}{kT} \qquad x_i \equiv \frac{p_i}{\sqrt{mkT}} \tag{10}$$

$$y = \sum_{i=1}^{r} x_i^2 \qquad \varphi\left(x_i\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x_i^2}{2}} \tag{11}$$

5 МОДЕЛЬ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

Определение

Идеальный газ – макроскопическая система, состоящая из N частиц $(N \sim N_{\text{А}})$, взаимодействующих между собой только при непосредственном соударении

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{3N} \frac{p_i^2}{2m} \qquad \varphi\left(p_i\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi mkT}}\, e^{-\frac{p_i^2}{2mkT}} \tag{9}$$

$$r \equiv 3N \qquad y \equiv \frac{2\varepsilon}{kT} \qquad x_i \equiv \frac{p_i}{\sqrt{mkT}} \tag{10}$$

$$y = \sum_{i=1}^{r} x_i^2 \qquad \varphi\left(x_i\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x_i^2}{2}} \tag{11}$$

Вывод

Величина y подчиняется распределению $\chi^2_{3N}\left(y\right)$

5 МОДЕЛЬ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

$$r \equiv 3N \qquad y \equiv \frac{2\varepsilon}{kT} \qquad x_i \equiv \frac{p_i}{\sqrt{mkT}} \tag{9}$$

$$\mathcal{P}\left(y' < y\right) = \int\limits_0^y \chi_r^2\left(y'\right) \mathrm{d}y'$$

5 МОДЕЛЬ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

$$r \equiv 3N \qquad y \equiv \frac{2\varepsilon}{kT} \qquad x_i \equiv \frac{p_i}{\sqrt{mkT}} \tag{9}$$

$$\mathcal{P}\left(y' < y\right) = \int_0^y \chi_r^2\left(y'\right) \mathrm{d}y' = \frac{1}{2^{r/2}\Gamma\left(r/2\right)} \int_0^y y'^{\frac{r}{2}-1}\, e^{-\frac{y'}{2}} \mathrm{d}y'$$

5 МОДЕЛЬ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

$$r \equiv 3N \qquad y \equiv \frac{2\varepsilon}{kT} \qquad x_i \equiv \frac{p_i}{\sqrt{mkT}} \tag{9}$$

$$\mathcal{P}\left(y' < y\right) = \int\limits_0^y \chi_r^2\left(y'\right)\mathrm{d}y' = \frac{1}{2^{r/2}\Gamma\left(r/2\right)}\int\limits_0^y y'^{\,\frac{r}{2}-1}\, e^{-\frac{y'}{2}}\,\mathrm{d}y'$$

$$= \frac{1}{\left(kT\right)^{3N/2}\Gamma\left(3N/2\right)}\int\limits_0^\varepsilon \varepsilon'^{\,\frac{3N}{2}-1}\, e^{-\frac{\varepsilon'}{kT}}\,\mathrm{d}\varepsilon'$$

$$r \equiv 3N \qquad y \equiv \frac{2\varepsilon}{kT} \qquad x_i \equiv \frac{p_i}{\sqrt{mkT}} \tag{9}$$

$$\mathcal{P}\left(y' < y\right) = \int\limits_0^y \chi_r^2\left(y'\right) \mathrm{d}y' = \frac{1}{2^{r/2}\Gamma\left(r/2\right)} \int\limits_0^y y'^{\,\frac{r}{2}-1}\, e^{-\frac{y'}{2}} \mathrm{d}y'$$

$$= \frac{1}{\left(kT\right)^{3N/2}\Gamma\left(3N/2\right)} \int\limits_0^\varepsilon \varepsilon'^{\,\frac{3N}{2}-1}\, e^{-\frac{\varepsilon'}{kT}} \mathrm{d}\varepsilon' = \mathcal{P}\left(\varepsilon' < \varepsilon\right)$$

5 МОДЕЛЬ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

$$r \equiv 3N \qquad y \equiv \frac{2\varepsilon}{kT} \qquad x_i \equiv \frac{p_i}{\sqrt{mkT}} \tag{9}$$

$$\mathcal{P}\left(y' < y\right) = \int\limits_0^y \chi_r^2\left(y'\right) \mathrm{d}y' = \frac{1}{2^{r/2}\Gamma\left(r/2\right)} \int\limits_0^y y'^{\,\frac{r}{2}-1}\, e^{-\frac{y'}{2}} \mathrm{d}y'$$

$$= \frac{1}{\left(kT\right)^{3N/2}\Gamma\left(3N/2\right)} \int\limits_0^\varepsilon \varepsilon'^{\,\frac{3N}{2}-1}\, e^{-\frac{\varepsilon'}{kT}} \mathrm{d}\varepsilon' = \mathcal{P}\left(\varepsilon' < \varepsilon\right)$$

$$\boxed{f\left(\varepsilon\right) = \frac{1}{\left(kT\right)^{3N/2}\Gamma\left(3N/2\right)}\, \varepsilon^{\frac{3N}{2}-1}\, e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}} \tag{10}$$

6 ВНУТРЕННЯЯ ЭНЕРГИЯ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

$$r \equiv 3N \qquad y \equiv \frac{2\varepsilon}{kT} \qquad x_i \equiv \frac{p_i}{\sqrt{mkT}}$$

$$U = \langle\, \varepsilon \,\rangle$$

6 ВНУТРЕННЯЯ ЭНЕРГИЯ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

$$r \equiv 3N \qquad y \equiv \frac{2\varepsilon}{kT} \qquad x_i \equiv \frac{p_i}{\sqrt{mkT}}$$

$$U = \langle \varepsilon \rangle = \frac{kT}{2} \langle y \rangle$$

6 ВНУТРЕННЯЯ ЭНЕРГИЯ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

$$r \equiv 3N \qquad y \equiv \frac{2\varepsilon}{kT} \qquad x_i \equiv \frac{p_i}{\sqrt{mkT}}$$

$$U = \langle\, \varepsilon \,\rangle = \frac{kT}{2} \underbrace{\langle\, y \,\rangle}_{=r}$$

6 ВНУТРЕННЯЯ ЭНЕРГИЯ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

$$r \equiv 3N \qquad y \equiv \frac{2\varepsilon}{kT} \qquad x_i \equiv \frac{p_i}{\sqrt{mkT}}$$

$$U = \langle\, \varepsilon \,\rangle = \frac{kT}{2} \underbrace{\langle\, y \,\rangle}_{=3N}$$

6 ВНУТРЕННЯЯ ЭНЕРГИЯ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

$$r \equiv 3N \qquad\qquad y \equiv \frac{2\varepsilon}{kT} \qquad\qquad x_i \equiv \frac{p_i}{\sqrt{mkT}}$$

$$U = \langle \varepsilon \rangle = \frac{kT}{2} \langle y \rangle = \frac{3}{2} NkT$$

$$\boxed{U = \frac{3}{2} NkT} \tag{11}$$

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{3N} \frac{1}{2m} p_i^2$$

6 ВНУТРЕННЯЯ ЭНЕРГИЯ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

$$r \equiv 3N \qquad y \equiv \frac{2\varepsilon}{kT} \qquad x_i \equiv \frac{p_i}{\sqrt{mkT}}$$

$$U = \langle\, \varepsilon \,\rangle \; = \frac{kT}{2} \;\; \langle\, y \,\rangle \;\; = \frac{3}{2}\, NkT$$

$$\boxed{U = \frac{3}{2}\, NkT} \qquad (11)$$

Задание 1 С помощью функции

$$f\left(\varepsilon\right) = \frac{1}{\left(kT\right)^{3N/2}\,\Gamma\left(3N/2\right)}\;\varepsilon^{\frac{3N}{2}-1}\;e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}$$

вычислите наиболее вероятное значение энергии ε

6 ВНУТРЕННЯЯ ЭНЕРГИЯ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

$$r \equiv 3N \qquad y \equiv \frac{2\varepsilon}{kT} \qquad x_i \equiv \frac{p_i}{\sqrt{mkT}}$$

$$U = \langle \varepsilon \rangle = \frac{kT}{2} \langle y \rangle = \frac{3}{2} NkT$$

$$\boxed{U = \frac{3}{2} NkT} \tag{11}$$

Задание 2 Убедитесь, что подстановка $N = 1$ в функции

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{(kT)^{3N/2}\,\Gamma(3N/2)}\,\varepsilon^{\frac{3N}{2}-1}\,e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}$$

приводит к распределению Максвелла

7 ЗАКОН ДЮЛОНГА – ПТИ

$$\varepsilon = \varepsilon_{\mathrm{k}} + \varepsilon_{\mathrm{p}} \qquad \varepsilon_{\mathrm{k}} = \sum_{i=1}^{3N} \frac{p_i^2}{2m} \qquad \varepsilon_{\mathrm{p}} = \sum_{i=1}^{3N} \frac{m\omega_0^2 x_i^2}{2} \tag{12}$$

7 ЗАКОН ДЮЛОНГА – ПТИ

$$\varepsilon = \varepsilon_\mathrm{k} + \varepsilon_\mathrm{p} \qquad \varepsilon_\mathrm{k} = \sum_{i=1}^{3N} \frac{p_i^2}{2m} \qquad \varepsilon_\mathrm{p} = \sum_{i=1}^{3N} \frac{m\omega_0^2 x_i^2}{2} \tag{12}$$

Внутренняя энергия

$$U = \langle\, \varepsilon \,\rangle = \quad \langle\, \varepsilon_\mathrm{k} \,\rangle \quad + \quad \langle\, \varepsilon_\mathrm{p} \,\rangle$$

7 ЗАКОН ДЮЛОНГА – ПТИ

$$\varepsilon = \varepsilon_\mathrm{k} + \varepsilon_\mathrm{p} \qquad \varepsilon_\mathrm{k} = \sum_{i=1}^{3N} \frac{p_i^2}{2m} \qquad \varepsilon_\mathrm{p} = \sum_{i=1}^{3N} \frac{m\omega_0^2 x_i^2}{2} \tag{12}$$

Внутренняя энергия

$$U = \langle\, \varepsilon \,\rangle = \underbrace{\langle\, \varepsilon_\mathrm{k} \,\rangle}_{=(3/2)NkT} + \underbrace{\langle\, \varepsilon_\mathrm{p} \,\rangle}_{=(3/2)NkT} = 3NkT$$

7 ЗАКОН ДЮЛОНГА – ПТИ

$$\varepsilon = \varepsilon_\mathrm{k} + \varepsilon_\mathrm{p} \qquad \varepsilon_\mathrm{k} = \sum_{i=1}^{3N} \frac{p_i^2}{2m} \qquad \varepsilon_\mathrm{p} = \sum_{i=1}^{3N} \frac{m\omega_0^2 x_i^2}{2} \tag{12}$$

Внутренняя энергия

$$U = \langle\, \varepsilon \,\rangle = \underbrace{\langle\, \varepsilon_\mathrm{k} \,\rangle}_{=(3/2)NkT} + \underbrace{\langle\, \varepsilon_\mathrm{p} \,\rangle}_{=(3/2)NkT} = 3NkT$$

Теплоемкость

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = 3Nk \tag{13}$$

7 ЗАКОН ДЮЛОНГА – ПТИ

$$\varepsilon = \varepsilon_{\mathrm{k}} + \varepsilon_{\mathrm{p}} \qquad \varepsilon_{\mathrm{k}} = \sum_{i=1}^{3N} \frac{p_i^2}{2m} \qquad \varepsilon_{\mathrm{p}} = \sum_{i=1}^{3N} \frac{m\omega_0^2 x_i^2}{2} \tag{12}$$

Внутренняя энергия

$$U = \langle\, \varepsilon \,\rangle = \underbrace{\langle\, \varepsilon_{\mathrm{k}} \,\rangle}_{=(3/2)NkT} + \underbrace{\langle\, \varepsilon_{\mathrm{p}} \,\rangle}_{=(3/2)NkT} = 3NkT$$

Теплоемкость

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = 3Nk \tag{13}$$

Условие применимости

$$kT \gg \hbar\omega_0$$

8 ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ

Распределение Гиббса

$$\mathcal{P}\left(\varepsilon\right) = \frac{\Omega\left(\varepsilon\right)}{Z}\, e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \qquad (14)$$

Статистическая сумма

$$Z = \sum_{\varepsilon} \Omega\left(\varepsilon\right) e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \qquad (15)$$

8 ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ

Распределение Гиббса

$$\mathcal{P}\left(\varepsilon\right) = \frac{\Omega\left(\varepsilon\right)}{Z}\; e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \qquad (14)$$

Статистическая сумма

$$Z = \sum_{\varepsilon} \Omega\left(\varepsilon\right) e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \qquad (15)$$

$$U = \langle\, \varepsilon \,\rangle = \frac{1}{Z} \sum_{\varepsilon} \varepsilon\, \Omega\left(\varepsilon\right) e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}$$

8 ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ

Распределение Гиббса

$$\mathcal{P}\left(\varepsilon\right) = \frac{\Omega\left(\varepsilon\right)}{Z}\, e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \qquad (14)$$

Статистическая сумма

$$Z = \sum_{\varepsilon} \Omega\left(\varepsilon\right) e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \qquad (15)$$

$$U = \langle\, \varepsilon \,\rangle = \frac{1}{Z} \sum_{\varepsilon} \varepsilon\, \Omega\left(\varepsilon\right) e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \; = kT^2 \frac{\partial}{\partial T} \ln Z$$

8 ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ

Распределение Гиббса

$$\mathcal{P}(\varepsilon) = \frac{\Omega(\varepsilon)}{Z}\, e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \qquad (14)$$

Статистическая сумма

$$Z = \sum_{\varepsilon} \Omega(\varepsilon)\, e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \qquad (15)$$

$$U = \langle\, \varepsilon \,\rangle = \frac{1}{Z} \sum_{\varepsilon} \varepsilon\, \Omega(\varepsilon)\, e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} = kT^2 \frac{\partial}{\partial T} \ln Z$$

Замечание

При больших N $(N \sim N_{\text{A}})$ практически реализуется только состояния с $\langle\, \varepsilon \,\rangle = U$

$$\langle\, \lambda(\varepsilon) \,\rangle \approx \lambda\big(U\big) \qquad \mathcal{P}(U) \approx 1$$

8 ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ

Распределение Гиббса

$$\mathcal{P}\left(\varepsilon\right) = \frac{\Omega\left(\varepsilon\right)}{Z}\, e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \qquad (14)$$

Статистическая сумма

$$Z = \sum_{\varepsilon} \Omega\left(\varepsilon\right) e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \qquad (15)$$

$$U = \langle\, \varepsilon \,\rangle = \frac{1}{Z} \sum_{\varepsilon} \varepsilon\, \Omega\left(\varepsilon\right) e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} = kT^2 \frac{\partial}{\partial T} \ln Z$$

$$Z = \Omega\left(U\right) e^{-\frac{U}{kT}}$$

8 ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ

Распределение Гиббса

$$\mathcal{P}\left(\varepsilon\right) = \frac{\Omega\left(\varepsilon\right)}{Z}\, e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \qquad (14)$$

Статистическая сумма

$$Z = \sum_{\varepsilon} \Omega\left(\varepsilon\right) e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \qquad (15)$$

$$U = \langle\, \varepsilon \,\rangle = \frac{1}{Z} \sum_{\varepsilon} \varepsilon\, \Omega\left(\varepsilon\right) e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} = kT^2 \frac{\partial}{\partial T} \ln Z$$

$$Z = \Omega\left(U\right) e^{-\frac{U}{kT}} \qquad \Rightarrow \qquad \Omega\left(U\right) = Z e^{\frac{U}{kT}}$$

8 ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ

Распределение Гиббса

$$\mathcal{P}\left(\varepsilon\right) = \frac{\Omega\left(\varepsilon\right)}{Z}\, e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \qquad (14)$$

Статистическая сумма

$$Z = \sum_{\varepsilon} \Omega\left(\varepsilon\right) e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \qquad (15)$$

$$U = \langle\, \varepsilon \,\rangle = \frac{1}{Z} \sum_{\varepsilon} \varepsilon\, \Omega\left(\varepsilon\right) e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \; = kT^2 \frac{\partial}{\partial T} \ln Z$$

$$Z = \Omega\left(U\right) e^{-\frac{U}{kT}} \qquad \Rightarrow \qquad \Omega\left(U\right) = Z e^{\frac{U}{kT}}$$

Энтропия

$$S = k \left\langle\, \ln \Omega\left(\varepsilon\right) \right\rangle = k \ln \Omega\left(U\right)$$

8 ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ

Распределение Гиббса

$$\mathcal{P}\left(\varepsilon\right)=\frac{\Omega\left(\varepsilon\right)}{Z}\,e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \qquad (14)$$

Статистическая сумма

$$Z=\sum_{\varepsilon}\Omega\left(\varepsilon\right)e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \qquad (15)$$

$$U=\langle\,\varepsilon\,\rangle=\frac{1}{Z}\sum_{\varepsilon}\varepsilon\,\Omega\left(\varepsilon\right)e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}\;=kT^{2}\frac{\partial}{\partial T}\ln Z$$

$$Z=\Omega\left(U\right)e^{-\frac{U}{kT}} \qquad \Rightarrow \qquad \Omega\left(U\right)=Ze^{\frac{U}{kT}}$$

Энтропия

$$S=k\,\langle\,\ln\Omega\left(\varepsilon\right)\rangle=k\ln\Omega\left(U\right)\;=k\ln Z+\frac{U}{T}$$

8 ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ

Распределение Гиббса

$$\mathcal{P}\left(\varepsilon\right) = \frac{\Omega\left(\varepsilon\right)}{Z}\, e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \qquad (14)$$

Статистическая сумма

$$Z = \sum_{\varepsilon} \Omega\left(\varepsilon\right) e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \qquad (15)$$

$$U = \langle\, \varepsilon\, \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{\varepsilon} \varepsilon\, \Omega\left(\varepsilon\right) e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} = kT^2 \frac{\partial}{\partial T} \ln Z$$

$$Z = \Omega\left(U\right) e^{-\frac{U}{kT}} \qquad \Rightarrow \qquad \Omega\left(U\right) = Z e^{\frac{U}{kT}}$$

Энтропия

$$S = k\,\langle\, \ln \Omega\left(\varepsilon\right) \rangle = k \ln \Omega\left(U\right) = k \ln Z + \frac{U}{T} = k \frac{\partial}{\partial T} \left(T \ln Z\right)$$

8 ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ

Распределение Гиббса

$$\mathcal{P}\left(\varepsilon\right) = \frac{\Omega\left(\varepsilon\right)}{Z}\, e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \qquad (14)$$

Статистическая сумма

$$Z = \sum_{\varepsilon} \Omega\left(\varepsilon\right) e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \qquad (15)$$

Внутренняя энергия

$$U = kT^2 \frac{\partial}{\partial T} \ln Z \qquad (16)$$

Энтропия

$$S = k \frac{\partial}{\partial T}\left(T \ln Z\right) \qquad (17)$$

Свободная энергия

$$F = U - TS = -kT \ln Z \qquad (18)$$

Давление

$$p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T = kT\left(\frac{\partial \ln Z}{\partial V}\right)_T \qquad (19)$$